PROCEEDINGS OF IAM, V7., N1., 2018, pp.131-138

ОБ ОЦЕНКАХ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

Ф.А. Алиев[1], В.Б. Ларин[2]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Институт Механики Академии Наук Украины, Украина
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматривается применительно к системе второго порядка оценки области изменения параметров гарантирующих устойчивость замкнутой системы. Оценивается близость этих оценок к истинным значениям границ областей устойчивости. Детально обсуждаются границы устойчивости при изменении параметров (параметрическое возбуждение, параметрический резонанс и т.п.). На примере проводится сравнение оценок с известными результатами.

Ключевые слова система второго порядка, алгебраическое уравнение Риккати, гарантированный устойчивость, границы устойчивости, замкнутая система.

AMS Subject Classification: AMS Subject Classification: 15A06, 15A24, 15A69

1. Введение

Различные варианты задач, в которых требуется определить область параметров, при которых гарантируются те или иные свойства функции или решения соответствующей задачи продолжают привлекать внимание исследователей (см., например [14, 17]). Существенно, что в [14, 17] рассматриваются задачи, в которых параметры не зависят от времени. В этой связи отметим работу [16], в которой рассматривается задача гарантирования устойчивости линейной управляемой системы, параметры которой зависят от времени. Естественно, возникает вопрос о том насколько оценки области изменения параметров гарантирующих устойчивость замкнутой системы [16] близки к истинным значениям границ областей устойчивости.

Ниже, этот вопрос рассматривается применительно к системе второго порядка. Этот выбор обусловлен тем, что для таких систем детально рассмотрены границы устойчивости при изменении их параметров (параметрическое возбуждение, параметрический резонанс и т.п.)

На примере приводится сравнение оценок [16] с известными результатами.

2. Общие соотношения

Так, пусть согласно [15,16] движение системы описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x} = \left[A_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i r_i(t)\right]x + \left[B_0 + \sum_{i=1}^{\ell} B_i s_i(t)\right]u\,;$$
$$|r_i(t)| \le \bar{r}\,,\ \ i = 1,2,\ldots,k\,;\ \ \bar{r} \ge 0\,; \qquad (1)$$
$$|s_i(t)| \le \bar{s}\,,\ \ i = 1,2,\ldots,\ell\,;\ \ \bar{s} \ge 0\,,$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$ – фазовый вектор и вектор управляющих воздействий соответственно, $r(t) \in R^k$, $s(t) \in R^\ell$ – векторы неопределенных параметров ($r_i(t)$, $s_i(t)$ – их компоненты).

Предполагается, что матрицы A_i, B_i имеют ранг, равный единице, т.е. допускают представление

$$A_i = d_i e_i',\ \ B_i = f_i g_i',$$

где d_i, e_i, f_i, g_i – векторы соответствующих размеров, штрих здесь и далее означает транспонирование. Задача стабилизации такой системы сводится к построению положительно определенного решения следующего алгебраического уравнения Риккати (АУР)[1-5,9-13]

$$A_0'P + PA_0 - P\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(B_0R^{-1}B_0' - \bar{s}B_0R^{-1}VR^{-1}B_0' - \bar{s}W\right) - \bar{r}T\right]P + \bar{r}U + \varepsilon Q = 0\,, \qquad (2)$$

где

$$\varepsilon > 0\,,\ T = \sum_i d_i d_i'\,,\ U = \sum_i e_i e_i'\,,\ \ V = \frac{1}{2}\sum_i g_i g_i'\,,\ W = \frac{1}{2}\sum_i f_i f_i'\,,$$

R, Q – симметричные положительно определенные весовые матрицы (при $\bar{s} = 0,\ \bar{r} = 0$ АУР (2) соответствует обычной линейной квадратичной задаче с весовыми матрицами εR и εQ). Задача стабилизации системы (1) имеет решение, если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ АУР (2) имеет положительно определенное решение.

3. Случай отсутствия управления.

Итак, пусть в (1) $B_i = 0,\ \ i = 0,1,\ldots,\ell$. В этом случае уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$A_0'P + PA_0 + \bar{r}PTP + \bar{r}U + \varepsilon Q = 0\,. \qquad (3)$$

Так как в рассматриваемом случае нас интересуют решения уравнения (1) при произвольно малом ε, то можно в уравнении (3) положить $\varepsilon = 0$ и далее рассматривать следующее АУР)[1-5,9-13]

$$A_0'P + PA_0 + \bar{r}PTP + \bar{r}U = 0\,. \qquad (4)$$

Условие существования искомого решения уравнения (4) удобно сформулировать используя соотношение Басса (3.2.17) [8] или матричной сигнум функции (соотношение (3.2.23) [8]). Из этих соотношений следует, что АУР (4) будет иметь искомое решение, если соответствующий Гамильтониан:

$$H = \begin{bmatrix} A & \bar{r}T \\ -\bar{r}U & -A' \end{bmatrix} \tag{5}$$

не будет иметь собственных значений на мнимой оси. Это условие позволяет определить величину $\bar{r}$, при которой АУР (4) будет иметь искомое решение.

Рассмотрим это более подробно на примере системы второго порядка.

1. Система второго порядка.

Итак, пусть в (1)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Среди матриц A_i в (1) будем считать только матрица A_1 не равна нулю. Далее рассмотрим два случая:

1. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
2. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Рассмотрим случай 1. Согласно (1) $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Соответствующий этом случаю Гамильтониан определяется (5) и характеристический полином матрицы H имеет вид:

$$\lambda^4 + (2\omega^2 - \beta^2 + \bar{r}^2)\lambda^2 + \omega^4 = 0. \tag{6}$$

Очевидно, что полином (6) не будет иметь мнимых корней, если $\bar{r} < \beta$. Т. е. в этом случае система будет асимптотически устойчивой, если $\bar{r} < \beta$. Другими словами, в этом случае оценка $\bar{r} < \beta$ будет точным значением границы устойчивости системы при возмущении, величина которого равна $\bar{r}$.

Проиллюстрируем на примере, что критерий отсутствия мнимых корней у полинома (6) и выполнение условия $\beta - \bar{r} > 0$, эквивалентны.

Пример 1. Принимаем: $\omega = 100$, $\beta = 10$, $\bar{r} = \beta(1 - 10^{-6})$. Для этих исходных данных имеем следующие значения корней полинома (6):

$$\lambda_{1,2} = -0{,}007i \pm 100i, \quad \lambda_{3,4} = -0{,}0071 \pm 100i,$$

которые достаточно близки к мнимой оси.

Таким образом, этот пример иллюстрирует сделанный ранее вывод о том, что оценка границы устойчивости [16], при изменении параметра β, является точной.

2. Случай 2.

В этом случае $T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, характеристический полином матрицы H, определяемой (5), имеет вид:

$$\lambda^4+(2\omega^2-\beta^2)\lambda^2+\omega^4-\bar{r}^2=0. \qquad (6)$$

Очевидно, что при условии $\omega>>\beta$, полином (6) не будет иметь мнимых корней, если:

$$\bar{r}^2<\left(\omega^2-\frac{\beta^2}{4}\right)\beta^2. \qquad (7)$$

Приняв во внимание, что рассматривается случай $\omega>>\beta$, можно получить из (7) следующую оценку для $\bar{r}$, которая гарантируют асимптотическую устойчивость возмущенной системы:

$$\bar{r}<\omega\beta. \qquad (8)$$

Сравним оценку (8) с известными. Так, при гармоническом возбуждении (в (1) $r_1(t)=\bar{r}\cos\omega t$, уравнение (16.61)[6]) в [6] приведено следующее значение величины $\bar{r}$ при котором (см. (16.65)[6]) система сохраняет устойчивость (не наступает параметрический резонанс):

$$\bar{r}<2\omega\beta. \qquad (9)$$

Таким образом, при гармоническом возбуждении, оценка (9) в два раза превосходит оценку (8).

В [7] рассматривается задача параметрического возбуждения электрического контура состоящего их индуктивности (L), емкости (C) и резистора (R). В отличие от рассмотренного выше случая здесь предполагается, что в (1) $r_1(t)=\bar{r}\,\mathrm{sign}(\cos 2\omega t)$ (см. рис. 4.2 а [7]). В [7] получено выражение для величины амплитуды изменения емкости конденсатора, при которой в системе не будут возникать незатухающие колебания (система будет устойчивой см. (4.1.6)[7]). В наших обозначениях, эта оценка имеет вид:

$$\bar{r}<\frac{\pi}{2}\omega\beta. \qquad (10)$$

Оценка (10) превосходит оценку (8), но меньше оценки (9). По-видимому, это является следствием того, что как отмечают авторы [7]: «…выбранный нами скачкообразный закон изменения C оптимален для вложения энергии».

Подчеркнем существенность предположения о том, что параметры системы зависят от времени. Так, если в рассматриваемом случае $r_1(t)=\bar{r}$

то очевидно, что система будет устойчивой если $\bar{r} < \omega^2$, что существенно превышает оценки $\bar{r}$ согласно (8)-(10).

Заключение.

Применительно к системе второго порядка рассмотрен вопрос о близости оценок [16] границ изменения параметров к истинным значениям границ областей устойчивости. Выбор системы второго порядка обусловлен тем, что для таких систем известны границы устойчивости при изменении их параметров.

Приведено сравнение оценок [16] с известными результатами.

Литература

1. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Ортогональные проекторы и решение алгебраических уравнений Риккати, Журнал вычислительной математики и математической физики, V. 29, N. 5, p.786-791.
2. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Спектральный метод решения матричных алгебраических уравнений Риккати, Докл . АН СССР , 1987, V.292, N.4, p.783-788.
3. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. Численный метод решения алгебраических уравнений Риккати , Мат. физика и нелинейная механика, 1984, V. 35, N.1, p.9
4. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. О вычислении ортогональных проекторов и решении матричного алгебраического уравнения Риккат, Украинский Математический Журнал, V.41, N. 1, p.5
5. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Задача о дихотомии спектра матрицы. Ортогональные проекторы и решение алгебраических уравнений Риккати Инс-т физики АН Аз ССР, 1989, Препринт 89.7
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. , ГИТТЛ. М., 1955. , 447 с.
7. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. – Физматгиз. М., 1978. , 392 с.
8. Aliev F.A, Larin V.B. Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. , 272.
9. Aliev F.A. Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System , Elm, Baku, 1989,
10. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Comments on “A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers”, Systems & Control Letters, V.14, N.5, p. 453.
11. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Orthogonal projectors and the solution of the Riccati matrix algebraic equation, Doklady Mathematics ,

V.38, N.3, p. 531-534.
12. Aliev F.A., Bordyug BA, Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati equations and polynomial matrix factorization, Systems & control letters , 1992. V.18, N.1,p. 49-59 .
13. Aliyev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Design of an optimal stationary regulator, Soviet Journal of Computer and Systems Sciences, 1985, V. 23, N.4, p. 68-76.
14. Blondel V.D., Gurbuzbalaban M., Megretski A., Overton M.L. Explicit Solution for Root Optimization of a Polynomial Family with One Affine Constraint, IEEE Trans. Automat. Control., 2000.V.57, N. 12.,p. 1131–1142.
15. Larin V. B. Control problems for systems with uncertainty, Int. Appl. Mech., 2001, V.37, N 12. p. 1539 – 1568.
16. Peterson I.R., Hollot C.V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems., Automatica., 1986. V. 22, N. 4., p. 3078 – 3089.
17. Schmidt A., Haasdonk B. Reduced basis approximation of large scale parametric algebraic Riccati equations, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2018. V. 24 . p. 129 – 151.

About estimations of domain of the system stability When changing its parameters

F.A. Aliev, V.B. Larin

ABSTRACT

In this work with respect to a system of the second order the estimations of the domain the changing of the parameters that guarantee the stability of a closed system are close to the true values of the boundaries of the stability domains is considered. The boundaries of stability are discussed in detail when their parameters change (parametric excitation, parametric resonance, etc.). On an example comparison of estimates with the known results is given..

Keywords: a second order system, the algebraic Riccati equation, a guaranteed stability of the stability boundary, closed system.

References

1. Aliev F.A. , Bordyuq V.A., Larin V.B. Ortoqonalniye proyektori i resheniye alqebraicheskix uravneniy Rikkati , Journal vichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, V. 29, N. 5, p.786-791. (Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Orthogonal projections and the solution of algebraic Riccati equations, Journal of Computational Mathematics and

Mathematical Physics, V. The 29, N. The 5, p.786-791) (in Russian)
2. Aliev F.A., Bordyuq V.A., Larin V.B. Spektralnoy metod resheniya matrichnix alqebraicheskix uravneniy Rikkati, Dokl . AN SSSR , 1987, V.292, N.4, p.783-788.(Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Spectral method for solving matrix algebraic Riccati equations, Dokl. AN SSSR, 1987, V.292, N.4, p.783-788.) (in Russian)
3. Aliev F.A., Bordyuq V.A., Larin V.B.Chislenniy metod resheniye alqebraicheskix uravneniy Rikkati, Mat. Fizika i nelineynaya mexanika , 1984, V. 35, N.1, p.9. (Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. A numerical method for solving the algebraic Riccati equations, Mat. Physics and Nonlinear Mechanics, 1984, V. 35, N.1, p.9)(in Russian)
4. Aliev F.A. , Larin V.B. O vichisleniya ortoqonalnix proyektorov i resheniya matrichnoqo alqebraicheskoqo uravneniya Rikkati, Ukrainskiy Matematicheskiy Journal, V.41, N. 1, p.5.(Aliev F.A., Larin V.B. On the computation of orthogonal projections and decision matrix algebraic Riccati equation, Ukrainian Mathematical Journal, V.41, N. 1, p.5)(in Russian)
5. Aliev F.A., Larin V. B. Zadacha o dixotomoii spectra matrichi.Ortoqonalniyi proyektori i resheniya alqebraicheskix uravneniya Rikkati Ins-tut AN Az SSR , 1989, Preprint 89.7(Aliev F.A., Larin V.B. The problem of the dichotomy of the spectrum of the matrix. Orthogonal projections and the solution of algebraic Riccati equations Ince of Physics Academy of Az SSR, 1989, Preprint 89.7) (in Russian)
6. Boqolyubov N.N., Mitropolskiy YU.A. Asimptoticheskiye metodi v teorii nelineynix kolebaniy . ,QITTL. M., 1955. , 447 c.(Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. , GITTL. M., 1955., 447 p.)(in Russian)
7. Miqulin V.V., Medvedev V.I., Mustel E.R., Pariqin V.N. Osnovi teorii kolebaniy., Fizmatqiz. M., 1978. , 392 s.(Migulin V.V., Medvedev V.I., Mustel ER, Parygin V.N. Fundamentals of the theory of oscillations. - Fizmatgiz. M., 1978., 392 p.) (in Russian)
8. Aliev F.A, Larin V.B. Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. , 272.
9. Aliev F.A. Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System , Elm, Baku, 1989.
10. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Comments on “A stability-enhancing scaling procedure for Schur-Riccati solvers”, Systems & Control Letters, V.14, N.5, p. 453.
11. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Orthogonal projectors and the solution of the Riccati matrix algebraic equation, Doklady Mathematics , V.38, N.3, p. 531-534.
12. Aliev F.A., Bordyug BA, Larin V.B. Discrete generalized algebraic Riccati

equations and polynomial matrix factorization, Systems & control letters , 1992. V.18, N.1,p. 49-59. .

13. Aliyev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Design of an optimal stationary regulator, Soviet Journal of Computer and Systems Sciences, 1985, V. 23, N.4, p. 68-76.
14. Blondel V.D., Gurbuzbalaban M., Megretski A., Overton M.L. Explicit Solution for Root Optimization of a Polynomial Family with One Affine Constraint, IEEE Trans. Automat. Control., 2000.V.57, N. 12.,p. 1131–1142.
15. Larin V. B. Control problems for systems with uncertainty, Int. Appl. Mech., 2001, V.37, N 12. p. 1539 – 1568.
16. Peterson I.R., Hollot C.V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems., Automatica., 1986. V. 22, N. 4., p. 3078–3089.
17. Schmidt A., Haasdonk B. Reduced basis approximation of large scale parametric algebraic Riccati equations, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2018. V. 24 . p. 129 – 151.